

Der Differentialquotient

- A) Für den Weg $s(t)$, den ein Körper beim freien Fall in der Zeit t zurücklegt, gilt näherungsweise $s(t) = 5 t^2$ (t in Sekunden, s in Meter; der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt).
- a) Berechne die mittleren Geschwindigkeiten eines frei fallenden Körpers in den Zeitintervallen $[3, z]$ für $z = 1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001$.
- b) Wie groß ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3?

Lösung: (War vom Schüler einzusetzen)

$$a) \bar{v}(3, z) = \frac{s(z) - s(3)}{z - 3} = \frac{s(z) - s(3)}{z - 3} \quad z \neq 3 \quad \frac{5 \cdot (z^2 - 9)}{z - 3} \quad \text{oder:}$$

$$\begin{aligned} b) \bar{v}(3, 3+h) &= \frac{s(3+h) - s(3)}{h} \quad h \neq 0 \\ &= \frac{5 \cdot (3+h)^2 - 5 \cdot 3^2}{h} \\ &= \frac{45 + 30h + 5h^2 - 45}{h} \\ &= \underline{30 + 5h} \end{aligned}$$

Zeitintervall [3; z]	Mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}(3, z)$
[3; 4]	35
[3; 3,5]	32,5
[3; 3,1]	30,5
[3; 3,01]	30,05
[3; 3,001]	30,005

- b) Wir bezeichnen die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 mit $v(3)$. Was soll man unter der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 überhaupt verstehen? Es liegt nahe, die mittlere Geschwindigkeit in einem immer kleineren Zeitintervall $[3, z]$ zu ermitteln, d.h. z immer näher bei 3 zu wählen, wodurch man eine immer bessere Näherung für die gesuchte Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 erhält. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 3 kann man als *Grenzwert* dieser mittleren Geschwindigkeiten auffassen, wenn sich z *unbegrenzt* der Zahl 3 nähert. Aufgrund der Tabelle vermuten wir, dass dieser Grenzwert 30 ist, dass also $v(3) = 30$ m/s beträgt.

oder: wenn sich h unbegrenzt der Zahl Null nähert.

$$v(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{v}(3, 3+h)$$

Man liest dies: $v(3)$ ist der Limes von $\bar{v}(3, z)$ für z gegen 3.

Ein Körper bewege sich gemäß der Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto s(t)$. Man nennt

$$v(t) = \lim_{z \rightarrow t} \bar{v}(t, z) = \lim_{z \rightarrow t} \frac{s(z) - s(t)}{z - t}$$

die **Geschwindigkeit** des Körpers **zum Zeitpunkt t** = Momentangeschwindigkeit

$$\text{bzw. } v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

Deutungen des Differentialquotienten

Der **Differentialquotient** (die **Änderungsrate**) $f'(x)$ ist ungefähr gleich

- dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente in der Nähe von x ,

- der mittleren Änderung von f pro Argumenteinheit in der Nähe von x ,
- dem Faktor, mit dem die Änderung der Argumente in der Nähe von x multipliziert werden muss, um die Änderung der Funktionswerte zu erhalten. Der Differentialquotient $f'(x)$ gibt näherungsweise an, wie viel mal schneller die Funktionswerte in der Nähe von x wachsen bzw. fallen als die Argumente.

Die zweite dieser drei Deutungen ergibt allerdings nur dann einen Sinn, wenn die Argument- einheit klein im Vergleich zur betrachteten Umgebung von x ist.

Der Differentialquotient als Steigung

Differentialquotient als Steigung einer linearen Funktion

Satz: Der Differentialquotient einer linearen Funktion f mit $f(x) = kx + d$ ist an jeder Stelle x gleich der Steigung k .

Differentialquotient als Steigung einer nichtlinearen Funktion

Wir betrachten jetzt eine Funktion f , die nicht unbedingt linear sein muss. Wir werden zeigen, dass man in diesem Fall den Differentialquotienten $f'(x)$ als Steigung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x/f(x))$ auffassen kann. Dazu müssen wir aber zuerst erklären, was man unter einer Tangente an einen Funktionsgraphen überhaupt versteht.

Im Folgenden erarbeiten wir eine Definition der Tangente an einen Funktionsgraphen, die auf Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716) zurückgeht. In Abb.4 gilt:

$$\text{Steigung der Sekante} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Wir lassen z gegen x streben (siehe Abb.4). Nähert sich z unbegrenzt der Stelle x , so nähert sich der Punkt Z unbegrenzt dem Punkt X , und die Sekante nähert sich unbegrenzt einer Grenzgeraden t . Die Steigung dieser Grenzgeraden ist der Grenzwert der Sekantensteigungen für z gegen x , also $f'(x)$. Diese Grenzgerade bezeichnet man als Tangente an den Graphen von f im Punkt X .

Abb.4

Definition: Es sei f eine reelle Funktion und $f'(x)$ ihr Differentialquotient an der Stelle x .

Die Gerade durch den Punkt $X = (x/f(x))$ mit der Steigung $f'(x)$ bezeichnet man als **Tangente** an den Graphen von f im Punkt X . Die Steigung $f'(x)$ dieser Tangente heißt auch **Steigung der Funktion** f an der Stelle x .

Wir können somit den bisherigen Deutungen des Differentialquotienten eine weitere hinzufügen. Man kann $f'(x)$ als Steigung der Funktion f an der Stelle x bzw. als Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $X = (x/f(x))$ deuten.

Der Differenzenquotient - mittlere Änderungsrate:

In untenstehender Tabelle sind die Entfernungen eines 100m-Läufers in Abhängigkeit von der Anzahl der gelaufenen Sekunden angegeben:

- 1) Betrachten Sie die Intervalle $[3;5]$, $[4;7]$ und $[7;9]$!
- 2) In welchem Intervall wird die längste Strecke zurückgelegt?
- 3) In welchem Intervall ist die mittlere Geschwindigkeit am höchsten?

t	s(t)
1	8
2	17
3	27
4	38
5	49
6	61
7	72
8	81
9	90
10	100

Fertigen Sie nun eine Tabelle an, die jeder gelaufenen Sekunde die mittlere Geschwindigkeit zuordnet. Berechnen Sie dann die den oben angegebenen Intervallen zugehörigen Differenzenquotienten! Was sagen diese nun aus?

t	v(t)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	